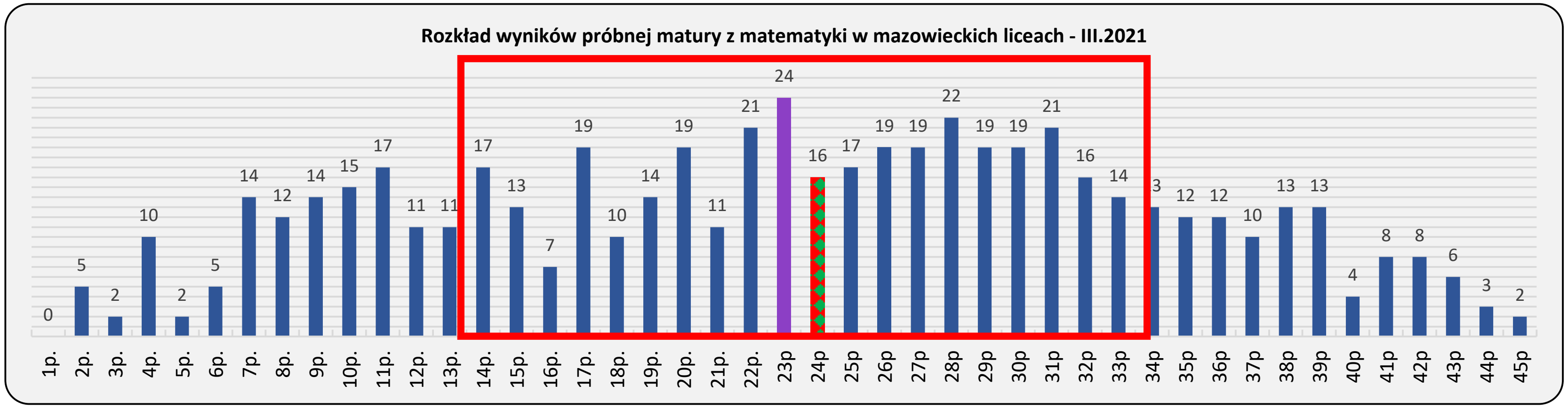
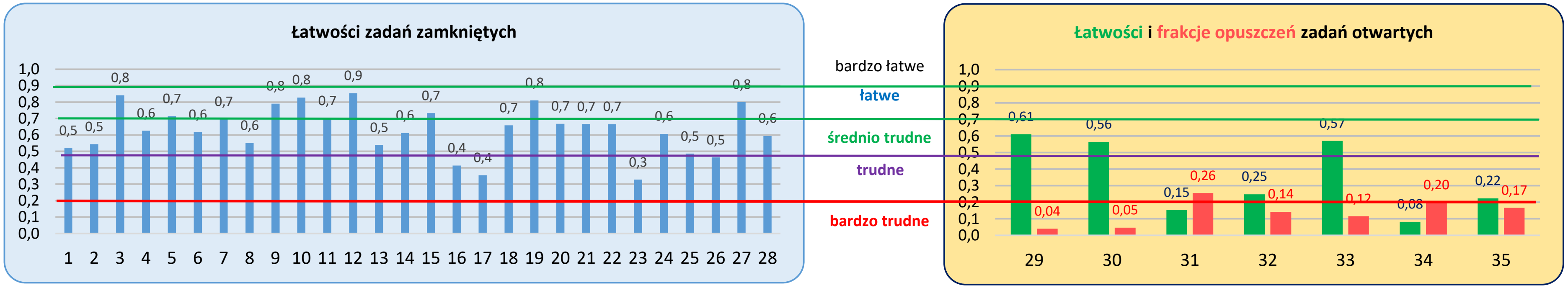
**WYKRESY obrazujące rozkłady wyników PRÓBNRGO EGZAMINU MATURALNEGO 2021 w LICEACH OGÓLNOKSZTAŁCĄCYCH**




**Przedział (13p.; 33,9p.) obejmuje 68% uczniów** (jedno odchylenie standardowe od średniej). W tym przedziale wyniki niższe od średniej otrzymało 165 uczniów, a wyzsze - 179 uczniów.
Poza przedziałem znalazło się 107 uczniów (21%) z wynikami co najwyżej 12p. (opanowali co najwyżej 27% umiejętności mierzonych testem) oraz 91 uczniów (18%) z wynikami powyżej 34p. (ci uczniowie opanowali co najmniej 76% umiejętności mierzonych testem).
**Mediana** 24p. jest prawie równa **średniej** (23,9p.), a **dominanta** dla tego rozkładu jest równa 23p. - taki rozkład miar tendencji centralnej wskazuje na lekką asymetrie dodatnią rozkładu (nieco więcej uczniów otrzymało wynik niższy od średniej).

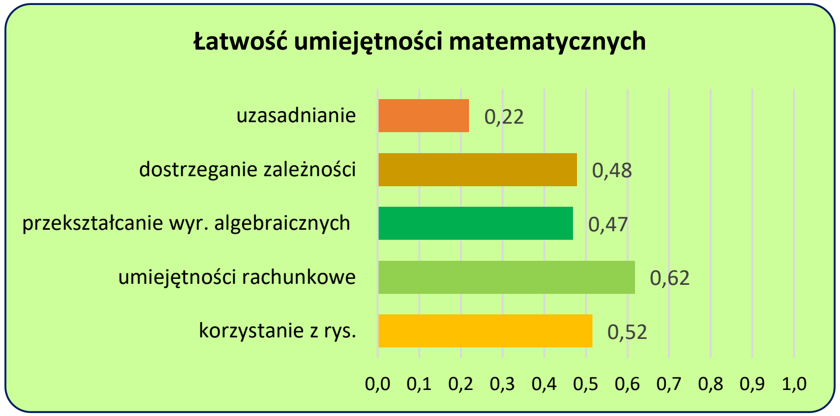
**Łatwość testu równa 0,52** wskazuje, że próbna matura na poziomie podstawowym była dla tej grupy uczniów **średnio łatwa/średnio trudna.**



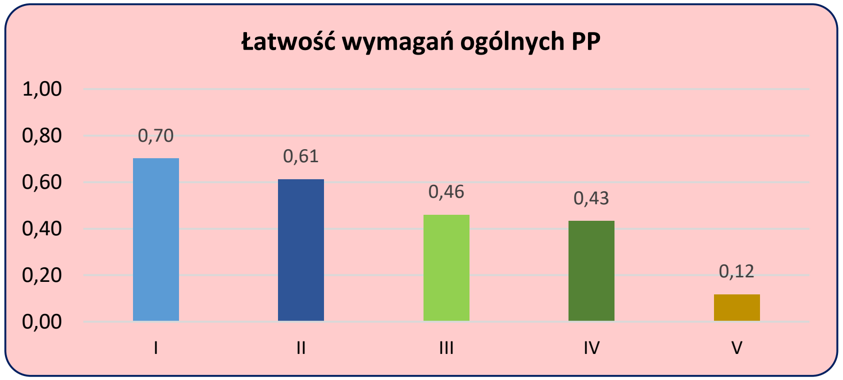

Wyniki uczniów wskazują, że w zestawie zadań zamkniętych dla badanych uczniów nie było zadań **bardzo łatwych**.
**Zadania łatwe** to: 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 15, 19, 21, 27
**Zadania średnio trudne** to: 1, 2, 4, 6, 8, 13, 14, 18, 20, 22, 24, 25, 28
**Zadania trudne** to: 16, 17, 23, 26
Wśród zadań zamkniętych nie było zadań **bardzo trudnych**.

Wyniki uczniów wskazują, że w zestawie zadań otwartych nie było dla badanych uczniów zadań **łatwych** ani **bardzo łatwych**.
**Zadania średnio trudne** to: 29, 30, 33.
**Zadania trudne** to: 32, 35. **Zadania bardzo trudne to: 31, 34.**
Wielu uczniów nie podjęło próby rozwiązania zadań: 31 - 20% ucz., 34 - 15% ucz., 35 - 12% ucz.
**Należy zwrócić uwagę** na wysoką frakcję opuszczeń zadań trudnych i bardzo trudnych.

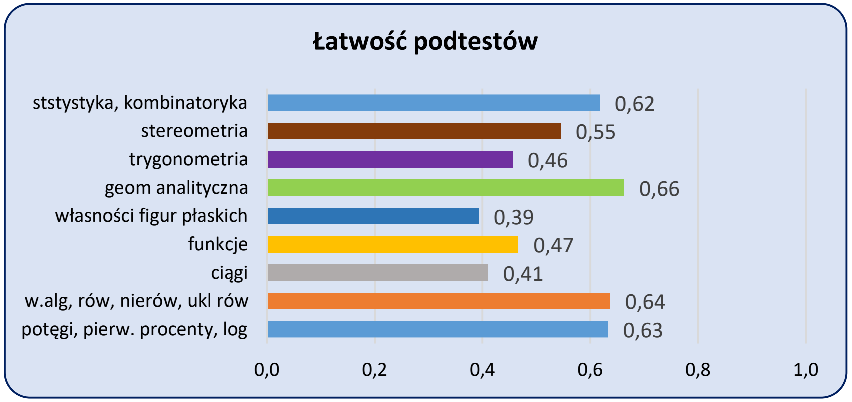
# ŁATWOŚCI W UMIEJĘTNOŚCI MATEMATYCZNYCH UCZNIÓW




Współczynniki łatwości dla umiejętności matematycznych uczniów wskazują, że w tym teście nie było zadań, które sprawdzałyby łatwe lub bardzo łatwe umiejętności uczniów.
**Trudne** dla uczniów okazało się **uzasadnianie**, którego elementy występowały w zadaniach 14, 31, 34 i 35.
Pozostałe umiejętności okazały się średnio trudne.
Może cieszyć fakt, że całkiem nieźle na tym tle wypadły umiejętności rachunkowe.
Do wielu zadań w tym teście warto było wykorzystac rysunek - wyniki wskazują, że zaledwie połowa badanych uczniów potrafiła to zrobić.

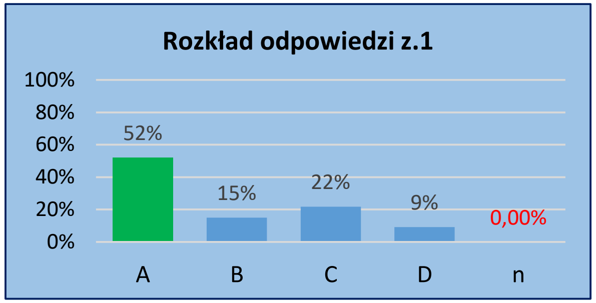


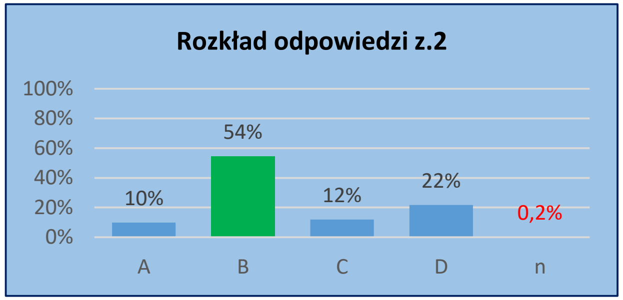

Spośród wymagań ogólnych podstawy programowej najlepiej wypadło wymaganie I - wykorzystanie i tworzenie informacji, nieco gorzej wymaganie II - wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wmaganiu III - modelowanie matematyczne, podobnie jak wymaganiu IV – użycie i tworzenie strategii, sprostała niestety mniej niż połowa uczniów.
Tylko 65 uczniów (13% piszących) wykazała się umiejętnością rozumowania i zapisywania argumentów dowodzących badanych własności (wymaganie V).
Należy mobilizować uczniów do rozwiązywania zadań wymagających zapisania ciągu argumentów na poparcie sposobu rozwiązania zadania – dotyczy to zarówno zadań typu „udowodnij, że…" jak i innych zadań, w których uczeń opisuje kolejne kroki postępowania i zapisuje odpowiedź wskazującą, że zakończył rozwiązanie problemu występującego w zadaniu.
Warto na tablicy zapisywać pełne rozwiązania zadań – wraz z wszystkimi komentarzami, a także odsyłać uczniów do podręcznika w celu analizy zapisów rozwiązań przykładów do omawianych tematów lekcji.

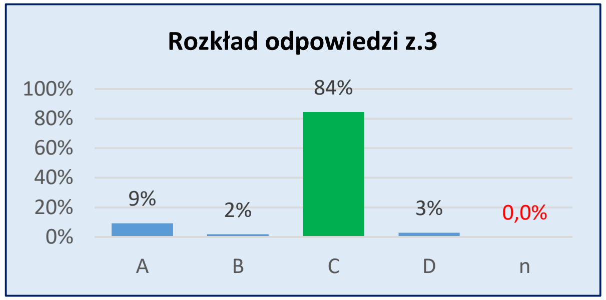


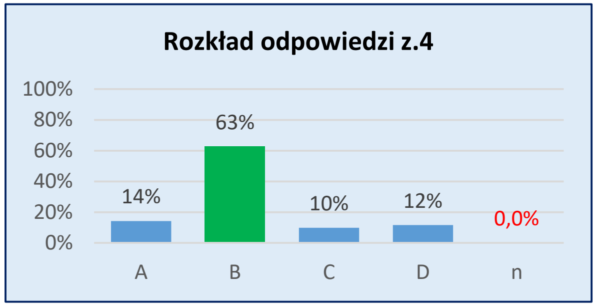

Na słabe wyniki dla zadań z zakresu "Ciągi" wpłynęły zapewne złe wybory odpowiedzi w zadaniu 14 oraz dużo kłopotów z rozwiązaniem zadania 35, w którym uczeń musiał opracować strategię rozwiązania, a potem bezbłędnie ją przeprowadzić.
Warto dokładnie przyjrzec się wyborom odpowiedzi w zadaniach zamkniętych z zakresu "własności figur płaskich" i przeanalizować z uczniami popełnione błędy.
Zadanie 32 z trygonometrii wymagało od ucznia szerszego spojrzenia na problem - 61% uczniów już na starcie nie poradziła sobie z zadaniem.

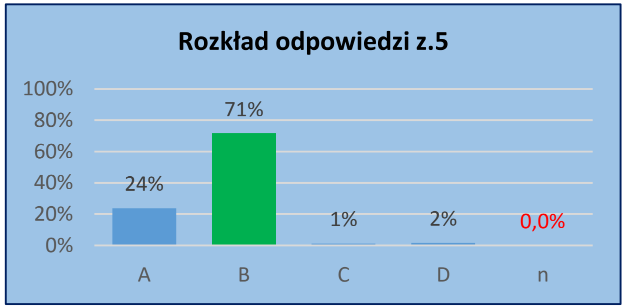
## ROZKŁAD ODPOWIEDZI W ZADANICH ZAMKNIĘTYCH

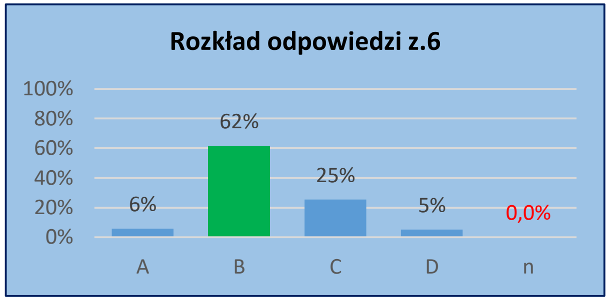


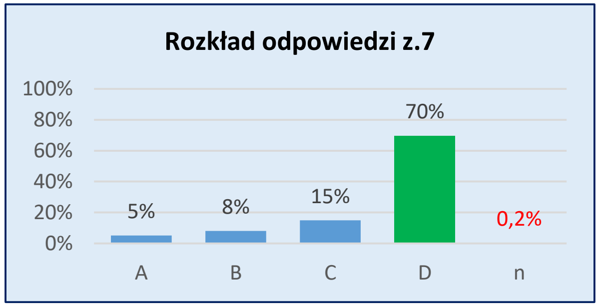



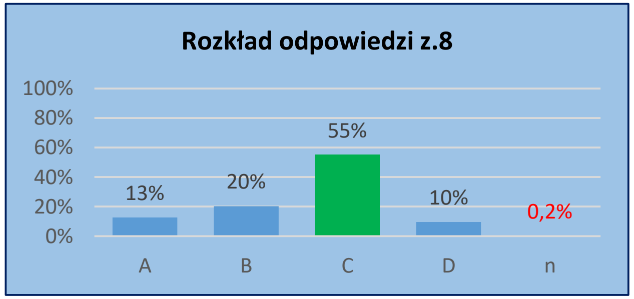



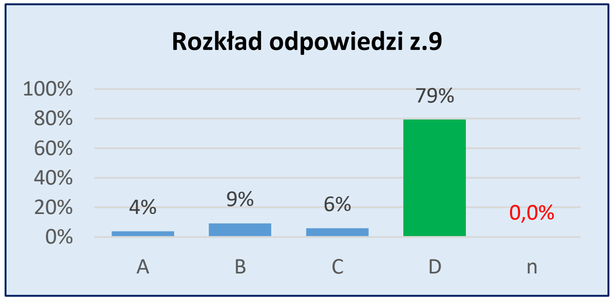



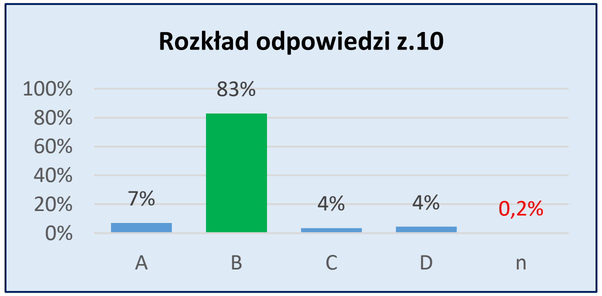



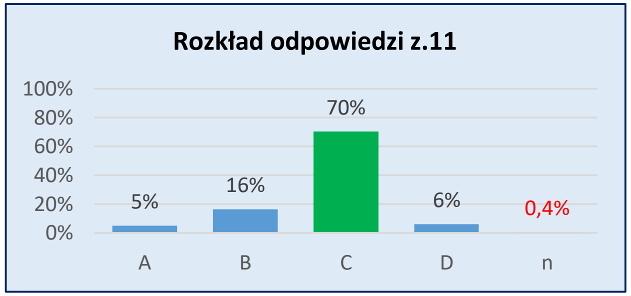



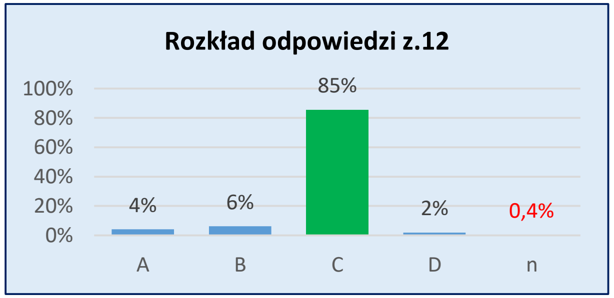



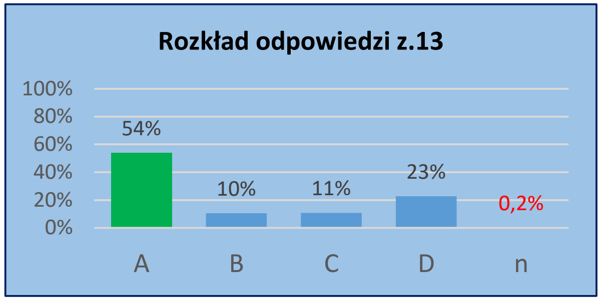



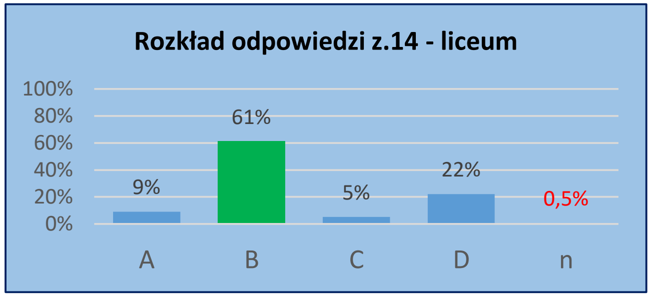



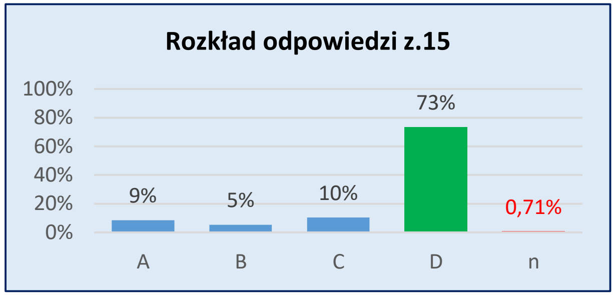



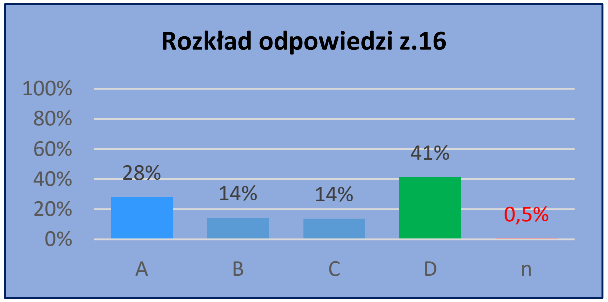



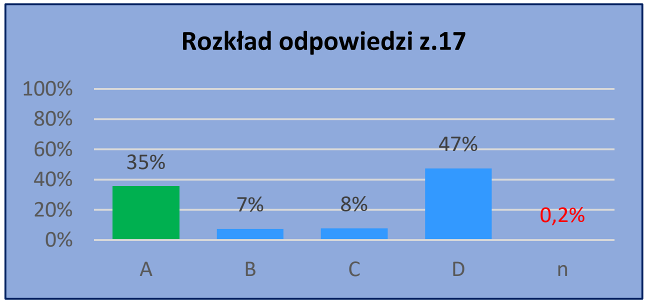



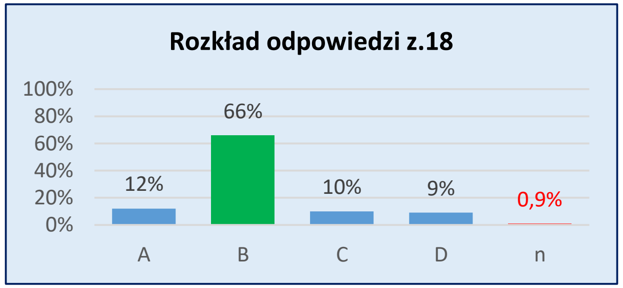

Rozkład odpowiedzi z.13
100%
80%
60%
40%
20%
0%
54%
10%
11%
23%
0,2%
A
B
C
D
n

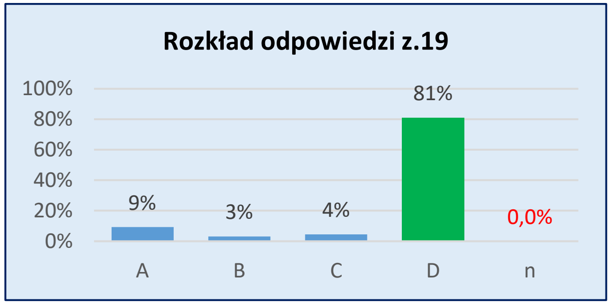

Rozkład odpowiedzi z.14 - liceum
100%
80%
60%
40%
20%
0%
9%
61%
5%
22%
0,5%
A
B
C
D
n

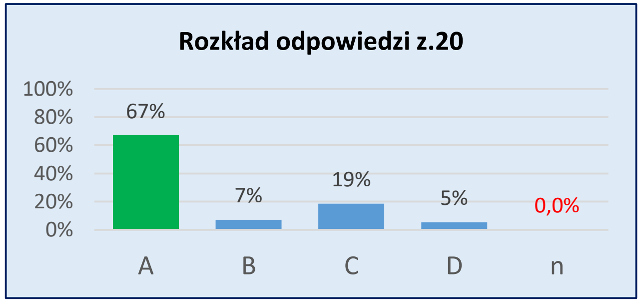

Rozkład odpowiedzi z.15
100%
80%
60%
40%
20%
0%
9%
5%
10%
73%
0,71%
A
B
C
D
n

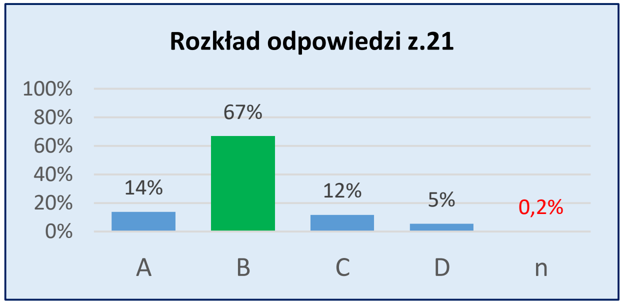

Rozkład odpowiedzi z.16
100%
80%
60%
40%
20%
0%
28%
14%
14%
41%
0,5%
A
B
C
D
n

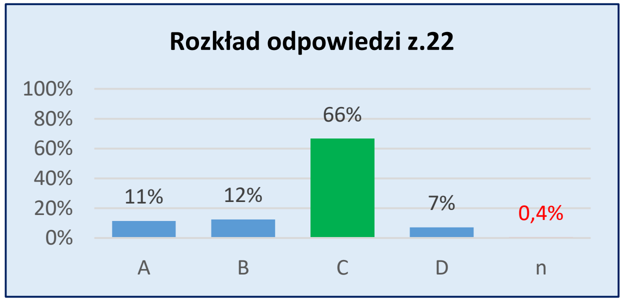

Rozkład odpowiedzi z.17
100%
80%
60%
40%
20%
0%
35%
7%
8%
47%
0,2%
A
B
C
D
n

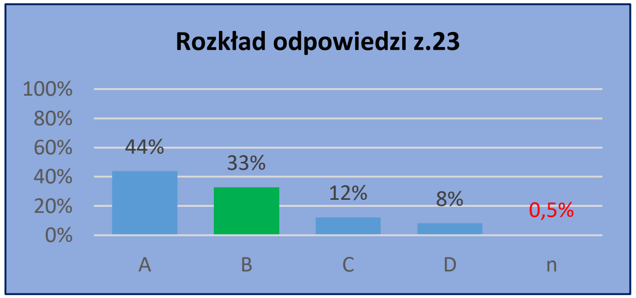

Rozkład odpowiedzi z.18
100%
80%
60%
40%
20%
0%
12%
66%
10%
9%
0,9%
A
B
C
D
n

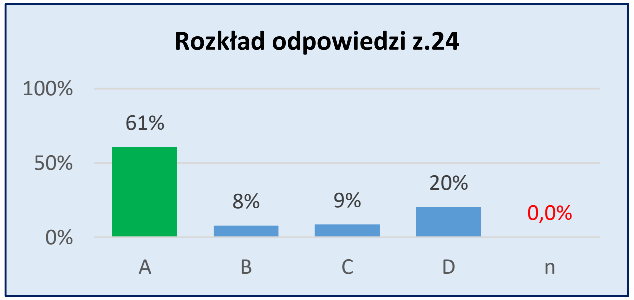

Rozkład odpowiedzi z.19
100%
80%
60%
40%
20%
0%
9%
3%
4%
81%
0,0%
A
B
C
D
n

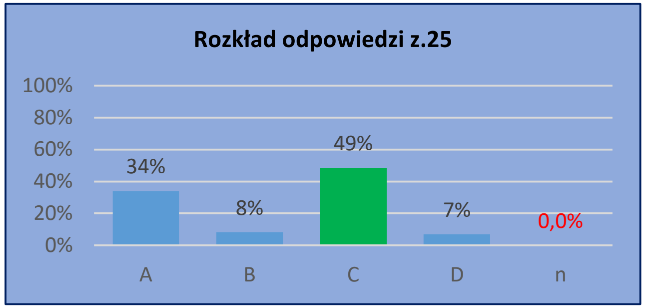

Rozkład odpowiedzi z.20
100%
80%
60%
40%
20%
0%
67%
7%
19%
5%
0,0%
A
B
C
D
n

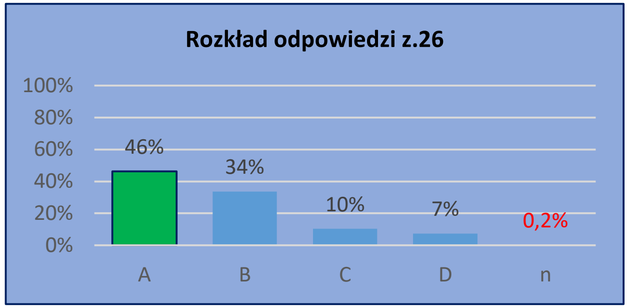

Rozkład odpowiedzi z.21
100%
80%
60%
40%
20%
0%
14%
67%
12%
5%
0,2%
A
B
C
D
n

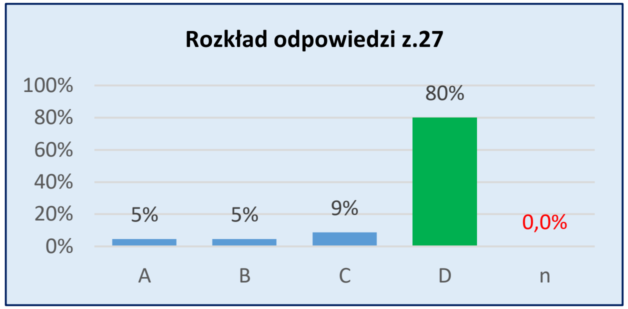

Rozkład odpowiedzi z.22
100%
80%
60%
40%
20%
0%
11%
12%
66%
7%
0,4%
A
B
C
D
n

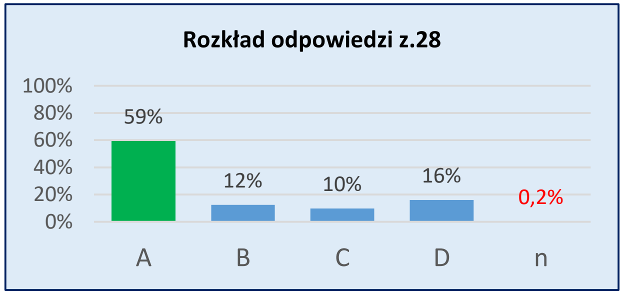

Rozkład odpowiedzi z.23
100%
80%
60%
40%
20%
0%
44%
33%
12%
8%
0,5%
A
B
C
D
n


Rozkład odpowiedzi z.24
100%
50%
0%
61%
8%
9%
20%
0,0%
A
B
C
D
n




Koniecznie należy z uczniami przeanalizować błędne wskazania odpowiedzi w zadaniach zamkniętych pod katem popełnionych błędów.
Często jest to głęboko zakorzeniona nieznajomość wzorów lub własności, a nie błędy nieuwagi.
Uczniowie na maturze mają możliwość korzystania ze wzorów, ale błędy wskazują no to, że nie widzą takiej potrzeby, ufając swoim złym nawykom.
Należy razem z uczniami przeanalizować szczególnie te zadania zamknięte, których wykresy zaznaczono ciemniejszym kolorem - w tych zadaniach procent złych odpowiedzi przewyższa procent poprawnych wyborów - dogłębna analiza dystraktorów wskaże na rodzaj popełnianych błędów.
Np. w zadaniu 23 wybór odpowiedzi A wskazuje, że być może aż 44% uczniów zamiast kąta 30° zobaczyła na swoim rysunku kąt 60° i do tak zaobserwowanego trójkata prostokątnego zastosowała wiadomości z gimnazjum o trójkącie 30,60,90, albo uczniowie nie znają wzoru na tg kąta ostrego. Odpowiedź C wskazuje, że uczeń, który mozolnie wyliczył długość (a-b)/2 i znalazł taką odpowiedź bezmyślnie ja zakreślił i zaprzestał dlaszego rozwiązywania zadania. Zwrócenie uwagi na poprawne, zgodne z danymi, wykonywanie rysunków ma szansę ustrzec uczniów przed podobnymi błędami na egzaminie.
Polecam zmobilizować uczniów do opracowania sposobów otrzymywania poszczególnych wyników w zadaniach zamkniętych (A, B, C, D) i nazywania błędów, które zostały popełnione.

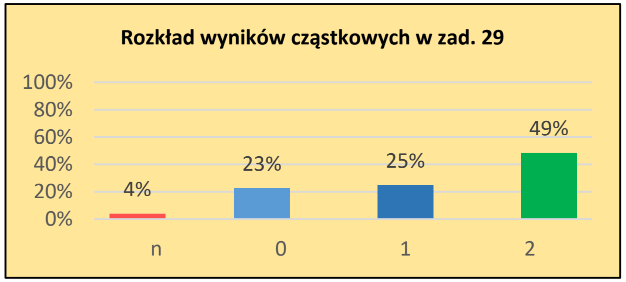
**Wypowiedzi uczestników kursu:**
(EC): *Zadania zamknięte były typowe. Moi uczniowie jednak popełniali dużo błędów rachunkowych. Tłumaczyli się, że zadań jest tak dużo i obawiali się, że zabraknie im czasu na zadania otwarte. Dopiero po wynikach uświadomili sobie, że tak naprawdę to trzeba się skupić na tych zadaniach zamkniętych, bo daje to ponad 60% na maturze.*
*(BB): Większość zadań [zamkniętych] była typowa. Choć zdarzały się zadania, których wcześniej na maturze nie było. Przykładem może być zadanie nr 14, gdzie uczniowie mieli podane trzy ciągi i wśród nich mieli znaleźć ten, który był ciągiem arytmetycznym. O ile sobie przypominam, wcześniej tego typu zadania w arkuszach się nie pojawiało, ale nie było ono trudne, więc uczniowie dali sobie radę.*
*(GŚ): Jak uczniowie rozwiązywali zadanie 14? Czy odpowiedź D wynikała z błędów rachunkowych (w zasadzie jeśli już ktoś liczył, to miał do wykonania łatwe rachunki na liczbach naturalnych, najtrudniejsze chyba 6.32 - 33) czy też ze "strzelania"?*
*Czy rozwiązywali je korzystając z własności ciągu arytmetycznego: c_n: 2^( n+1) - 2^n=2^n.2 - 2^n=2^n.1 - różnica nie jest stała, nie jest to ciąg arytmetyczny*
*b_n: 2(n+1)+13-(2n+13) = 2 dla każdego n, różnica stała, ciąg arytmetyczny, to a_n już nie trzeba sprawdzać, mamy poprawną odpowiedź!*
*Czy niektórzy uczniowie od razu "podejrzewali o arytmetyczność" ciąg b_n i tylko dla pewności sprawdzili (przeliczyli, czy przeanalizowali?).*
*Czy warto przeanalizować z uczniami różne strategie rozwiązywania zadań otwartych?*

# ROZKŁAD WYNIKÓW CZĄSTKOWYCH W ZADANICH OTWARTYCH

## Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

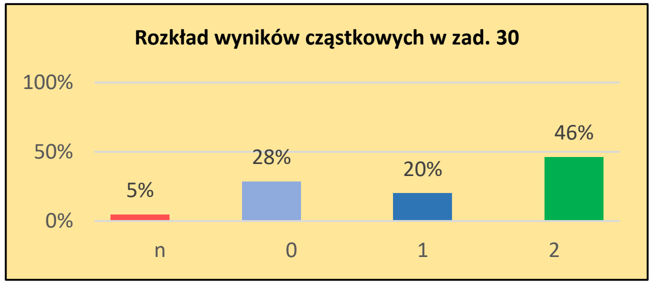
$$3x(x+1) > x^2 + x + 24$$




## Zadanie 30. (0–2)

Rozwiąż równanie:

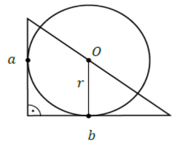
$$\frac{6x-1}{3x-2} = 3x + 2$$

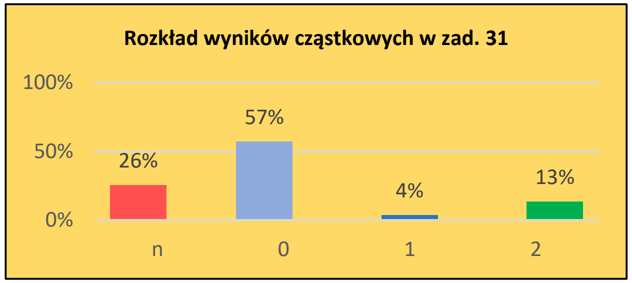



## Zadanie 31. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości $a$ i $b$. Punkt $O$ leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta i jest środkiem okręgu stycznego do przyprostokątnych tego trójkąta (zobacz rysunek).

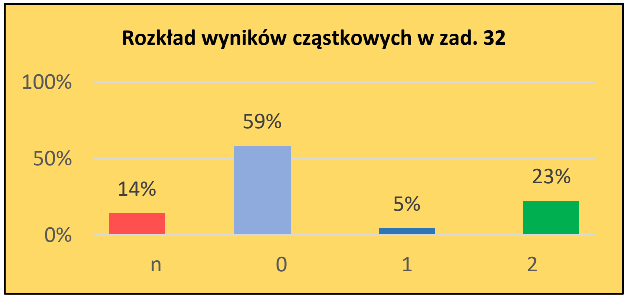
Wykaż, że promień $r$ tego okręgu jest równy $\frac{ab}{a+b}$.



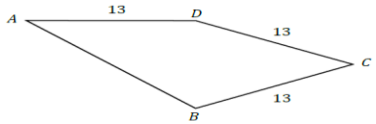

## Zadanie 32. (0–2)

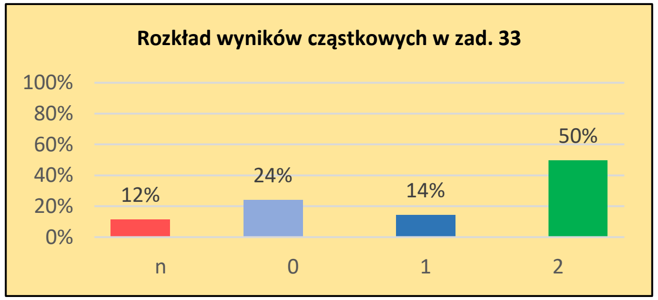
Kąt $\alpha$ jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $2\sin\alpha\cos\alpha$.




## Zadanie 33. (0–2)

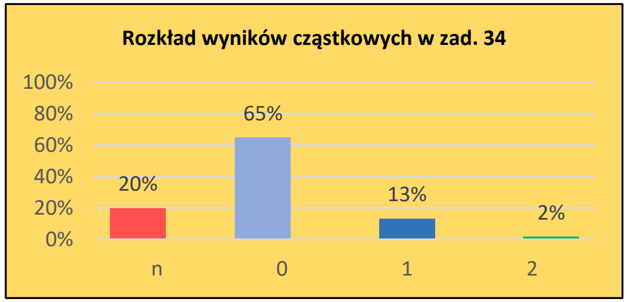
Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |AD| = 13$ (zobacz rysunek). Przekątna $BD$ tego czworokąta ma długość $10$ i jest prostopadła do boku $AD$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



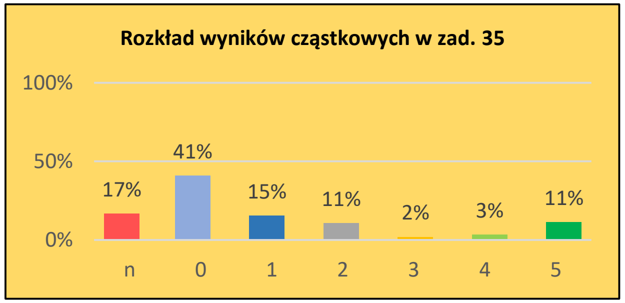

## Zadanie 34. (0–2)

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że $1 + c > b$.




## Zadanie 35. (0–5)

Rosnący ciąg arytmetyczny $(a_n)$ jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa $10$. Wyrazy $a_3, a_5, a_{13}$ tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz wzór na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego $(a_n)$.



Rozwiązania zadań: **31** - dowodzenie w zadaniu geometrycznym, **32** - odkrycie, że trzeba wykorzystać jedynkę trygonometryczną, **35** - wymagające znajomości własności ciągów, zarówno arytemetycznego jak i geometrycznego, **wymagają bardzo dokładnej analizy i powtórzenia** wiadomości z badanych zakresów.

W **zadaniu 34** uczeń otrzymywał 1 punkt, gdy zaobserwował, że skoro "*funkcja f(x) = x^2+bx+c nie ma miejsc zerowych*" i współczynnik przy x^2 jest dodatni, to f(x)>0 - niestety tylko 15% licealistów otrzymało 1 punkt za to zadanie, a to wskazuje, że uczniowie nie znają podstawowych własności funkcji kwadratowej.
My nauczyciele możemy dyskutować o drugiej części dowodu zaproponowanej przez CKE, ale uczniom trzeba uświadomić fakt, że mogli za zadanie stracić tylko 1 punkt zamiast dwóch.
Możemy razem z uczniami zastanawiać się, czy uzupełnienie polecenia do postaci: "Wykaż, że istnieje taki x, że 1 + c > b" albo "Wykaż, że dla każdego x zachodzi: 1 + c > b" zmienia zadanie?
Co wówczas z tym jednym punktem za pokonanie zasadniczych trudności?

**Wypowiedzi uczestników kursu:**
(EW): Uczniowie mojej klasy ocenili, że zadania na maturze próbnej, ogólnie rzecz biorąc, były łatwe (poza wymienianym już wielokrotnie zadaniem 34). Zauważyli, że popełnione błędy wynikały często z nieuważnego przeczytania treści zadania, pośpiechu. Dostrzegają, jak ważne jest kontrolowanie czasu przy rozwiązywaniu zadań w domu, podczas przygotowań do matury.

(BB): Słabo wśród moich uczniów wypadło zadanie 31. Uczniowie, którzy rozwiązali to zadanie, wybrali metodę, która polegała na podzieleniu trójkąta ABC na trzy figury: kwadrat i dwa trójkąty prostokątne i zsumowaniu tych pól, co spowodowało udowodnienie tezy.

(BZ): Moi uczniowie nie wpadli na pomysł sprawdzenia dla konkretnej liczby [zad.34 - przypis własny], ponieważ takich dowodów nigdy nie robiliśmy - po opublikowaniu schematu stwierdzili, że nigdy im nie pozwalałam wykazywać poprawności na konkretnych (wybranych) liczbach (zgodnie z uwagami, które jako egzaminatorzy otrzymujemy "Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość ... jedynie dla wybranych wartości, to otrzymuje 0 punktów za całe rozwiązanie), a tu taka niespodzianka.

(EW): W mojej klasie uczeń wpadł na bardzo ciekawy sposób rozwiązania tego zadania. Wykorzystał zależność między średnią arytmetyczną a geometryczną, biorąc pod uwagę liczby 1 i c (średnia arytmetyczna liczb 1 i c jest większa lub równa od średniej geometrycznej tych liczb) no i oczywiście fakt, że delta musi być mniejsza od 0. - SUPER! [komentarz własny]