

**Sprawdzian „POTĘGA MATEMATYKI”
dla uczniów klas pierwszych szkół ponadgimnazjalnych - 2012**

Zadanie 3. (3 punkty) Grupa A

W maju 2012 r. Zbyszek wykorzystał n impulsów telefonicznych, każdy w cenie c zł. Natomiast w czerwcu częściej rozmawiał przez telefon i zwiększył liczbę wykorzystanych impulsów telefonicznych o 25%. Okazało się jednak, że operator telefoniczny z okazji EURO 2012 obniżył cenę impulsów telefonicznych o 20%. Jak zmieniła się opłata telefoniczna Zbyszka za czerwiec, w porównaniu z opłatą za maj 2012 r. Zapisz swój tok rozumowania i odpowiedź.

KRYTERIA OCENY ZADANIA 3

Zad. 3 3 pkt.	• Postęp istotny	1 p.	• Opis opłaty majowej i jednej z modyfikacji rachunku telefonicznego: przez operatora lub przez użytkownika	RiN	C	III modelowanie	A
	• Pokonanie zasadniczych trudności	2 p.	• Opis czerwcowego rachunku telefonicznego (z dwiema modyfikacjami)				A
	• Pełne rozwiązanie	3 p.	• Porównanie rachunku po dwóch modyfikacjach z majowym i sformułowanie odpowiedzi				M

WSKAZYWANIE KIERUNKU ROZWOJU UCZNIĄ

Wymaganie ogólne PP	Umiejętności ucznia:
Obiekt	<ul style="list-style-type: none"> • Pojęcie procentu • Pojęcie punktu procentowego
Reprezentacja	<ul style="list-style-type: none"> • Obniżka/podwyżka (porównywanie różnicowe) • Zmniejszanie/powiększanie o ...% • Działania na procentach • Działania na ułamkach
Model	<p>1. Porównanie rachunku majowego z czerwcowym</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Opłata majowa nc ➤ Opłata czerwcową: modyfikacja Zbyszka – $1,25n$ modyfikacja operatora – $0,8c$ ➤ Opłata czerwcową: $1,25n \cdot 0,8c = nc$ <p><u>WNIOSEK</u>: opłata w czerwcu nie zmieniła się.</p>

2. Porównanie rachunku majowego z czerwcowym – inny zapis

- Opłata majowa – nc
- Zmiana operatora – $\frac{4}{5}c$
- Zmiana użytkownika – $\frac{5}{4}n$
- Opłata czerwcową – $\frac{4}{5}c \cdot \frac{5}{4}n = cn$

WNIOSEK: opłata w czerwcu nie zmieniła się.

3. Metoda „na piechotę”:

MAJ		CZERWIEC		WNIOSKI
<i>l. impulsów</i>	<i>Koszt cena za 1 impuls = c</i>	<i>l. impulsów o 25% więcej niż w maju</i>	<i>Koszt cena za 1 impuls = 0,8 c</i>	
1	1c	$\frac{5}{4} \cdot 1 = 1\frac{1}{4}$		
2	2c	$\frac{5}{4} \cdot 2 = 2\frac{1}{2}$		
3	3c	$\frac{5}{4} \cdot 3 = 3\frac{3}{4}$		
4	4c	$\frac{5}{4} \cdot 4 = 5$	$5 \cdot 0,8c = 4c$	<i>Tyle samo zapłacił</i>
8	8c	$\frac{5}{4} \cdot 8 = 10$	$10 \cdot 0,8c = 8c$	<i>Tyle samo zapłacił</i>
12	12c	$\frac{5}{4} \cdot 12 = 15$	$15 \cdot 0,8c = 12c$	<i>Tyle samo zapłacił</i>
...	
<i>n</i> <i>wielokrotność liczby 4</i>	<i>nc</i>	$\frac{5}{4} \cdot n$	$\frac{5}{4}n \cdot \frac{4}{5}c = nc$	<i>Tyle samo zapłacił</i>

WNIOSEK: opłata w czerwcu nie zmieniła się.

4. Porównanie liczby impulsów wykonanych w maju i czerwcu

- Początkowa cena impulsu – c
- Początkowa liczba impulsów – n
- Początkowa opłata telefoniczna – cn
- **Liczba impulsów wykorzystanych przez Zbyszka po obniżce – $1,25n$**

- Cena impulsu po obniżce operatora – $0,8c$
- Liczba możliwych impulsów po obniżce operatora – $\frac{cn}{0,8c} = \frac{n}{0,8} = \frac{5}{4}n = 1,25n$

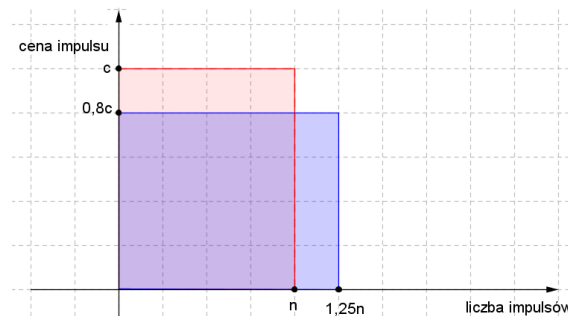
WNIOSEK: Zyszek nie przekroczy dotychczasowej opłaty telefonicznej

5. W tabeli:

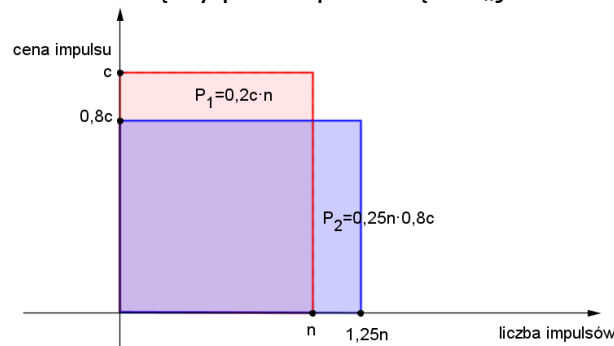
	maj	czerwiec
<i>Cena impulsu</i>	c	$0,8c$
<i>Liczba impulsów</i>	n	$1,25n$
<i>Koszt rozmów</i>	cn	$0,8c \cdot 1,25n = \frac{4}{5}c \cdot \frac{5}{4}n = cn$

WNIOSEK: Zyszek nie przekroczy dotychczasowej opłaty telefonicznej

6. Graficznie



Pole prostokąta „różowego” to koszt połączeń w maju, natomiast pole prostokąta „niebieskiego”, to koszt połączeń w czerwcu. Wystarczy zatem pokazać zależność między polami prostokątów „jednokolorowych”.



$$P_1 = 0,2cn \quad \text{oraz} \quad P_2 = \frac{1}{4}n \cdot \frac{4}{5}c = \frac{1}{5}cn = 0,2cn$$

WNIOSEK: Zyszek nie przekroczy dotychczasowej opłaty telefonicznej

	<p>7. Uzasadnienie wynikające z analizy warunków zadania:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Zbyszek w maju wykonał n impulsów ➤ W maju zapłacił cn [zł] ➤ W czerwcu wykonał $\frac{5}{4}n$ impulsów ➤ W czerwcu zapłaciłby $\frac{5}{4}nc$ [zł] ➤ Operator obniżył cenę impulsu o $0,2c$ [zł] ➤ W czerwcu jeden impuls kosztuje $0,8c$ [zł] ➤ W takim razie Zbyszek w czerwcu zapłaci $0,8 \cdot \frac{5}{4}nc = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}nc = nc$ [zł] <p><u>WNIOSEK</u>: Zbyszek nie przekroczy dotychczasowej opłaty telefonicznej</p>
<p>Strategia</p>	<p>Np. opisana w modelu metoda graficzna</p> <p>Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu</p>
<p>Rozumowanie i argumentacja</p>	<p>Np. uzasadnianie opisane w modelu jako najbardziej oryginalne rozwiązanie.</p> <p>Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.</p> <p>Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.</p>

KOMENTARZ DYDAKTYCZNY do zadania 3.

ZADANIA POMOCNICZE

1. Przeanalizuj zapisy: $a + 20\% \cdot a$, $120\% \cdot a$, $a + 0,2 \cdot a$, $1,2 \cdot a$.
Zapisz podobnie wyrażenia do zadania: „cenę towaru, która wynosiła x zł zwiększono o 12%”.
2. Zapisz na różne sposoby wyrażenie do zadania: „pole prostokąta, które wynosiło P zmniejszono o 3%”.
3. Zapisz wyrażenie do zadania: „Samochód w salonie samochodowym kosztował c zł. Dwukrotnie obniżono cenę tego samochodu – najpierw o 10%, potem jeszcze o 6%. Teraz samochód kosztuje”
4. Przeanalizuj problem i uzasadnij odpowiedź:
W jednym salonie samochodowym najpierw podwyższono cenę samochodów marki V o 7%, a potem obniżono o 13%. W drugim salonie cenę samochodów marki M najpierw obniżono o 13%, a potem podwyższono o 7%. Trzeci salon najpierw obniżył cenę samochodów marki F o 7%, a potem podwyższył o 13%. W którym z salonów samochody staniały i o ile procent?

CO POWINIENIEŚ UMIEĆ

1. Zastanów się, co sprawiło Ci największą trudność w tym zadaniu.
2. Przeczytaj uważnie treść zadania i przeanalizuj opisaną sytuację.
3. Opisz sytuację z zadania stosując wyrażenia algebraiczne.
4. Podstawowe pojęcia – procent, punkt procentowy, zmniejszyć/zwiększyć o ...procent.
5. Spróbuj zapisać analizę do zadania np. wykorzystując tabelkę.

Zadanie 3. (3 punkty)

W maju 2012 r. Zbyszek wykorzystał n impulsów telefonicznych, każdy w cenie c zł. Natomiast w czerwcu częściej rozmawiał przez telefon i zwiększył liczbę wykorzystanych impulsów telefonicznych o 25%. Okazało się jednak, że operator telefoniczny z okazji EURO 2012 obniżył cenę impulsów telefonicznych o 20%. Jak zmieniła się opłata telefoniczna Zbyszka za czerwiec, w porównaniu z opłatą za maj 2012 r. Zapisz swój tok rozumowania i odpowiedź.

KIERUNEK ROZWOJU

1. *Przedyskutuj rozwiązanie zadań:*

a) O ile zwiększy się koszt rozmów w czerwcu, jeśli liczbę impulsów i cenę jednego impulsu zwiększymy dwukrotnie?

a). o nc [zł]

b). o $2nc$ [zł]

c). o $3nc$ [zł]

d). o $4nc$ [zł]

b) Ile razy wzrośnie koszt rozmów w czerwcu, jeśli liczbę impulsów i cenę jednego impulsu zwiększymy dwukrotnie?

c) O ile procent zwiększy się koszt rozmów w czerwcu, jeśli liczbę impulsów i cenę jednego impulsu zwiększymy dwukrotnie?

d) Ile razy wzrośnie koszt rozmów w czerwcu, jeśli liczbę impulsów zwiększymy dwukrotnie zaś cenę jednego impulsu zmniejszymy dwukrotnie?

2. Uzasadnij, że zwiększając liczbę impulsów o $p\%$ przy jednoczesnej obniżce ceny za jeden impuls o $p\%$ koszt rozmów zwiększy się $\left(1 - \frac{p^2}{10^4}\right)$ razy.